

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. siječnja 2019.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Budući da za duljine stranica trokuta vrijedi $a : b : c = 3 : 5 : 7$, onda postoji (realni) broj k takav da je $a = 3k$, $b = 5k$ i $c = 7k$.

Tada je $3k + 5k + 7k = 210$, iz čega je $k = 14$.

1 BOD

Stranice trokuta duge su 42 cm, 70 cm i 98 cm.

3 BODA

Trokut je pravokutan ako za duljine stranica trokuta vrijedi Pitagorin poučak.

Kako je $42^2 + 70^2 = 6664$, a $98^2 = 9604$, trokut nije pravokutan.

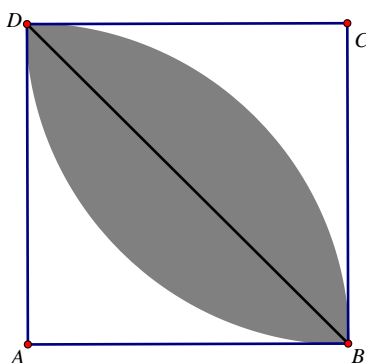
2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik može pokazati općenitiju tvrdnju, tj. tvrdnju da niti jedan trokut čije su duljine stranica u omjeru $3 : 5 : 7$ nije pravokutan. Naime $9k^2 + 25k^2 = 34k^2 \neq 49k^2$, $k > 0$.

2. Prvi način:

„Lista“ se može prepoloviti dijagonalom kvadrata \overline{BD} .



Površina polovice „lista“ jednaka je razlici površine kružnog isječka, koji je zapravo četvrtina kruga sa središtem u točki A i polumjerom \overline{AB} i površine jednakokračnog pravokutnog trokuta ABD .

1 BOD

Ako s a označimo duljinu stranice kvadrata, površina polovice „lista“ je $\frac{a^2\pi}{4} - \frac{a^2}{2}$.

2 BODA

Tada je površina cijelog „lista“ $\frac{a^2\pi}{2} - a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

1 BOD

Udio površine „lista“ u kvadratu jednak je omjeru površine lista i površine kvadrata:

$$\frac{a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{a^2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 1.57 - 1 = 0.57 = 57\%$$

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Površina kvadrata je a^2 . Kvadrat se sastoji od zatamnjenog „lista“ (njegovu površinu označimo s P_1) i nezatamnjenih sukladnih likova ABD i BCD (njihovu površinu označimo s P_2).

Zbroj površina tih triju likova mora biti jednaka površini kvadrata tj. mora vrijediti

$$a^2 = P_1 + 2P_2. \quad (1) \quad 1 \text{ BOD}$$

S druge strane, „list“ i nezatamnjeni lik ABD čine četvrtinu kruga površine $a^2 \cdot \frac{\pi}{4}$ pa mora biti

$$a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = P_1 + P_2. \quad (2) \quad 1 \text{ BOD}$$

Pomnožimo li (2) s 2 i od tako pomnožene druge jednadžbe oduzmemo prvu, dobivamo da je površina „lista“:

$$P_1 = \frac{a^2\pi}{2} - a^2. \quad 2 \text{ BODA}$$

Sada, istovjetno kao u prvom načinu rješavanja, zaključujemo kako je udio površine „lista“ u kvadratu približno jednak 57 %.

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Označimo s e_1 i f_1 duljine dijagonala početnog romba, a s e_2 i f_2 duljine dijagonala romba dobivenog nakon produljenja dijagonala. Tada vrijedi:

$$e_1 = f_1 + 14,$$

$$e_2 = e_1 + 2 = f_1 + 14 + 2 = f_1 + 16 \text{ i}$$

$$f_2 = f_1 + 8. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Vrijedi } P_2 = P_1 + 144, \text{ odnosno } \frac{e_2 \cdot f_2}{2} = \frac{e_1 \cdot f_1}{2} + 144. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Dalje je } \frac{(f_1+16) \cdot (f_1+8)}{2} = \frac{(f_1+14) \cdot f_1}{2} + 144, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$(f_1+16) \cdot (f_1+8) = (f_1+14) \cdot f_1 + 288,$$

$$f_1^2 + 16f_1 + 8f_1 + 128 = f_1^2 + 14f_1 + 288, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$10f_1 = 160 \Rightarrow f_1 = 16.$$

Tada je $e_1 = 16 + 14 = 30$.

Duljine dijagonala romba su 30 cm i 16 cm. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka su e, f duljine dijagonale prvog romba.

Vrijedi $e - f = 14$.

$$\text{Površina prvog romba je } P_1 = \frac{ef}{2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Duljine dijagonala drugog romba su $e + 2, f + 8$,

$$\text{a površina mu je } P_2 = \frac{(e+2)(f+8)}{2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Vrijedi } P_2 = P_1 + 144, \text{ pa možemo pisati } \frac{(e+2)(f+8)}{2} = \frac{ef}{2} + 144. \quad 1 \text{ BOD}$$

Dalje je

$$\frac{ef + 8e + 2f + 16}{2} = \frac{ef}{2} + 144,$$

$$\frac{ef}{2} + 4e + f + 8 = \frac{ef}{2} + 144 \Rightarrow 4e + f = 136. \quad 1 \text{ BOD}$$

Riješimo sustav jednadžbi:

$$e - f = 14$$

$$4e + f = 136$$

$$e = 30, f = 16$$

Duljine dijagonala romba su 30 cm i 16 cm.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: U slučaju *sitne* računске pogreške prilikom rješavanja sustava jednažbi, umjesto 2 BODA, treba dati 1 BOD.

4. Označimo s x broj kilometara koje je Gospodin Perić prešao u petak.

Za taj put trebao bi platiti $[20 + 5x]$ kuna jer u petak nije bilo popusta.

1 BOD

U subotu je gospodin Perić prešao 5 km više, tj. $[x + 5]$ kilometara, što bi bez popusta platio

$[20 + (5(x + 5))]$ kuna, tj. $[45 + 5x]$ kuna,

no uz 20 % popusta on plaća 80 % cijene, što znači da plaća $[0.8 (45 + 5x)]$ kuna, odnosno

$[36 + 4x]$ kuna.

1 BOD

S obzirom da je u subotu platio isti iznos novca kao u petak, vrijedi jednažba

$$0.8 (45 + 5x) = 20 + 5x,$$

1 BOD

$$36 + 4x = 20 + 5x,$$

$$x = 16.$$

1 BOD

Dakle, gospodin Perić je u petak prešao 16 km, a u subotu 21 km.

1 BOD

Za jednu vožnju platio je $20 + 16 \cdot 5 = 20 + 80 = 100$ kuna.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Bacanje svakog od simetričnih novčića ima dva moguća ishoda „palo je pismo“ ili „pala je glava“.

Ukupan broj mogućih ishoda za bacanje četiri simetrična novčića jednak je $2^4 = 16$. 2 BODA

Dva pisma mogu pasti na dva od četiri simetrična novčića na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ različitih načina, pri čemu

dvije glave padaju na preostala dva novčića.

2 BODA

Zato je tražena vjerojatnost $p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Označimo sa P = „palo je pismo“, G = „pala je glava“ ishode bacanja simetričnog novčića.

Ispišimo sve ishode bacanja četiri simetrična novčića:

$\{PPPP, PPGG, PPGP, PGPP, GPPP, PPGG, PGGP, PGPG, GPGP, GPPG, GGPP, PGGG, GP GG, GGPG, GG GP, GGGG\}$

3 BODA

Povoljni ishodi su:

$\{PPGG, PGGP, PGPG, GPGP, GPPG, GGPP\}$

1 BOD

Tražena vjerojatnost je $p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik računa vjerojatnost tako da ishode da je palo 0 pisama, 1 pismo, 2 pisma, 3 pisma i 4 pisma tretira jednako vjerojatnima te tako dobije da je vjerojatnost $\frac{1}{5}$, to treba ocijeniti s 0 BODOVA jer je potpuno pogrešno.

6. Prvi način:

$$(3a + 5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2 \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= 9(a - b)^2 + 48ab + 16b^2 = 9(a - b)^2 + 16(3ab + b^2) \quad 4 \text{ BODA}$$

Kako je $a - b$ djeljivo s 4, to je $(a - b)^2$ djeljivo sa 16,
pa je i $9(a - b)^2 + 16(3ab + b^2)$ djeljivo sa 16, jer je $3ab + b^2$ cijeli broj. 4 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik, u pokušaju dokazivanja, napiše rastav $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ i ne uspije to iskoristiti, svejedno treba, za taj rastav, dobiti 1 BOD.

Drugi način:

Iz uvjeta da su a i b cijeli brojevi takvi da je $a - b$ djeljivo s 4, slijedi da a i b imaju iste ostatke pri dijeljenju s 4, tj. da je $a = 4k + i$, $b = 4l + i$, za cijele brojeve k i l te $i = 0, 1, 2, 3$. 3 BODA

$$\text{Tada je } (3a + 5b)^2 = (3(4k + i) + 5(4l + i))^2 = (4(3k + 5l) + 8i)^2 \quad 4 \text{ BODA}$$

$$= 16(3k + 5l + 2i)^2 \text{ što je djeljivo sa 16, jer je } (3k + 5l + 2i)^2 \text{ cijeli broj.} \quad 3 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Ako je $a - b$ djeljivo sa 4, onda postoji cijeli broj k takav da je $a - b = 4k$.

$$\text{Tada je } a = b + 4k. \quad 2 \text{ BODA}$$

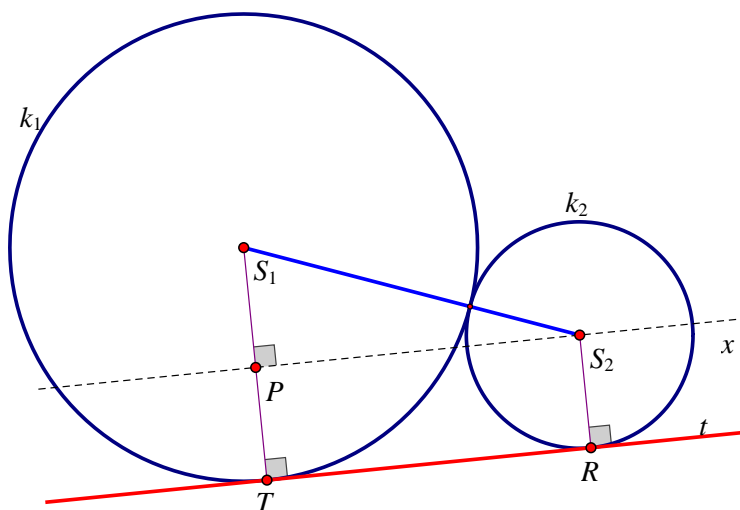
$$\text{Onda je } 3a + 5b = 3(b + 4k) + 5b = 8b + 12k. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\text{Tada je } (3a + 5b)^2 = (8b + 12k)^2 = 64b^2 + 192bk + 144k^2. \quad 3 \text{ BODA}$$

$$\text{To se može napisati kao } 16 \cdot (4b^2 + 12bk + 9k^2), \text{ pa je djeljivo sa 16.} \quad 3 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:



Skica: 1 BOD

Označimo sa S_1 i S_2 središta kružnica k_1 i k_2 redom, kao i njihove polumjere r_1 i r_2 . Neka je $r_1 > r_2$.

Zadatak se slično rješava i u slučaju $r_2 > r_1$. Točkom S_2 nacrtamo paralelu x s \overline{TR} . Neka je P sjecište pravca x i polumjera $\overline{S_1T}$ kružnice k_1 .

Tada je trokut S_1S_2P pravokutan, 1 BOD

a četverokut S_2PTR pravokutnik, pri čemu je $|S_2P| = |TR|$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka dobivamo $|TR| = |PS_2| = \sqrt{|S_1S_2|^2 - |S_1P|^2}$. (*) 2 BODA

Iskoristimo omjer (2 : 1) između polumjera kružnica k_1 i k_2 kao i pretpostavku da je $r_1 > r_2$. Naime, postoji broj r tako da možemo pisati; $r_1 = 2r$, $r_2 = r$.

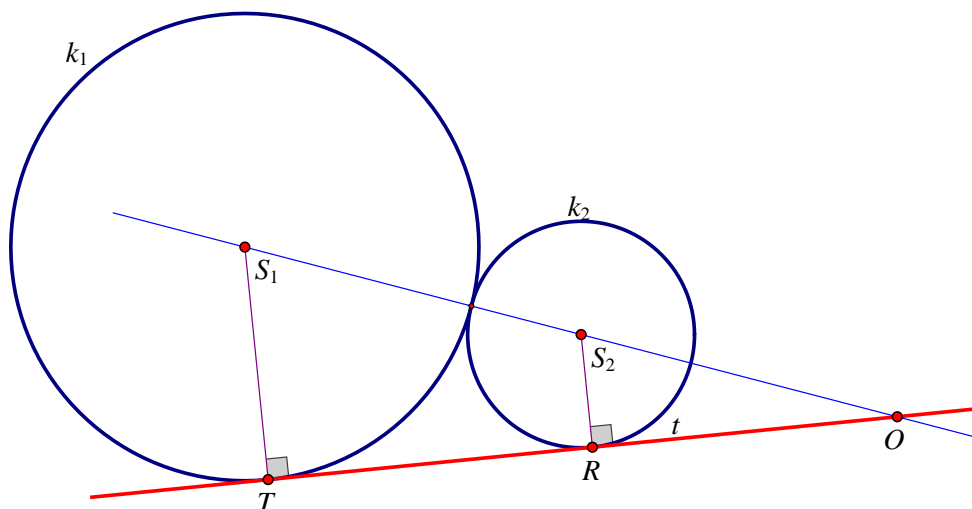
Tada je $|S_1S_2| = 3r$. 1 BOD

Uvrštavanjem u (*) dobivamo $|TR| = \sqrt{9r^2 - r^2} = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}r$. 3 BODA

pa je traženi omjer $|TR| : |S_1T| = 2\sqrt{2}r : 2r = \sqrt{2} : 1$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Skica: 1 BOD

Označimo sa S_1 i S_2 središta kružnica k_1 i k_2 redom, kao i njihove polumjere r_1 i r_2 . Neka je $r_1 > r_2$. Zadatak se slično rješava i u slučaju $r_2 > r_1$.

Iz uvjeta da je $r_1 : r_2 = 2 : 1$ slijedi da postoji broj r takav da je $r_1 = 2r$, $r_2 = r$.

Središtima S_1 i S_2 nacrtajmo pravac S_1S_2 .

Neka je točka O sjecište tangente TR i pravca S_1S_2 . Prema K-K poučku o sličnosti trokuti

ROS_2 i TOS_1 su slični (imaju jedan zajednički kut $\angle ROS_2 = \angle TOS_1$ i jedan pravi kut). 2 BODA

Zbog $|S_1T| = 2|S_2R|$ vrijedi $|S_1O| = 2|S_2O|$, odnosno $|S_2O| = |S_1S_2| = 3r$. 2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut ROS_2 dobije se:

$$|RO|^2 = |OS_2|^2 - |S_2R|^2 = 9r^2 - r^2 = 8r^2. \quad 3 \text{ BODA}$$

Tada je $|TR| = |RO| = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}r$. 1 BOD

Onda je $|TR| : |S_1T| = 2\sqrt{2}r : 2r = \sqrt{2} : 1$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA